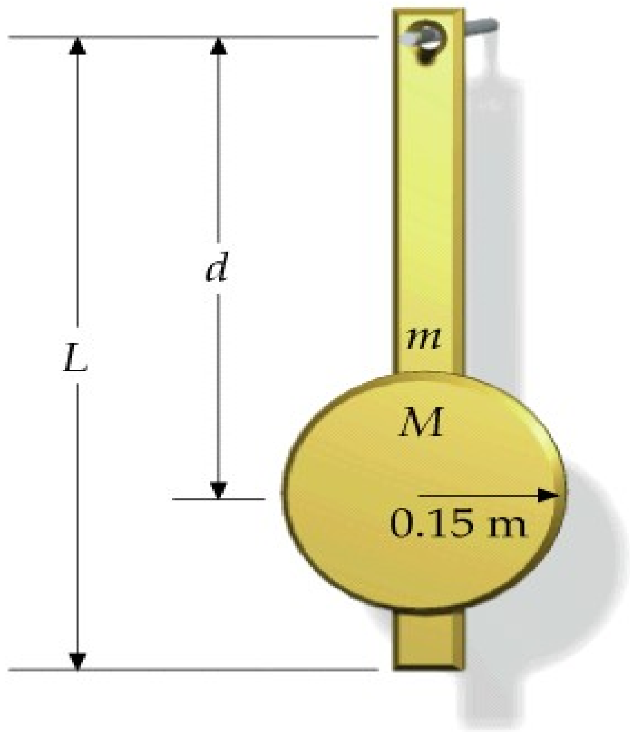
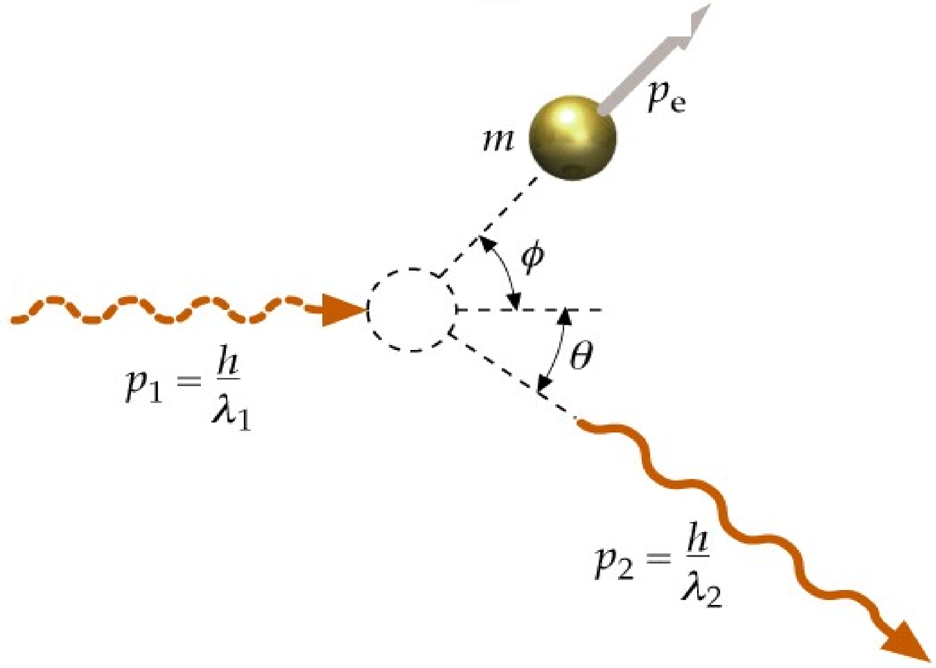
Mecânica e Ondas 2009

Semana 14
Aula de Revisão 2

1. Período do MHS
2. Amplitude do MHS
   (Energia Elástica da Mola)
3. Período do Pêndulo Físico
4. Função de Onda
5. Efeito de Compton.
6. Ondas e Estados Estacionários
   (Modelo de Bohr)





Com forças do tipo:

$$\boxed{F_{el} = -kx}$$

Obtém-se equações do tipo:

$$\boxed{ma = -kx}$$

Formulário

Ou seja:

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \rightarrow$$

solução

$$x = A\,\text{sen}\left(\omega t + \varphi\right)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\,\text{sen}\left(\omega t + \varphi\right)$$

Não esquecer a **freqência** e o **período**:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

A **energia potencial** elástica:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \leftarrow$$

Conservação da energia

Pendulo físico

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{sistema}}{mgd_{CM}}}$$

Teorema dos Eixos paralelos

$$I = I_{CM} + Md^2$$

Formulário

equação das ondas

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}=0$$

u é a velocidade de fase da onda

Fio: $u_T=\sqrt{\frac{F}{\rho}}$ Som: $u_L=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$

função de onda harmónica

$$\psi(x,t)=\underset{\text{amplitude}}{A}\sin(\underbrace{Kx\mp\omega t+\delta}_{\text{fase}})$$

A **energia** e o **momento** do **fotão** estão relacionados pela velocidade **c** :

$$\begin{cases} p=\frac{h}{\lambda} \\ E=hf \end{cases}\Rightarrow p=\frac{E}{c}$$

Choque com fotão (dispersão de Compton)

$$\lambda_{Compton}=\frac{h}{m_0c}=2.43\times10^{-12}\,m=2.43\,pm$$

1º Postulado de Bohr (estados estacionários): $2\pi r=n\lambda\Leftrightarrow mvr=n\hbar\Leftrightarrow L=n\hbar$

Raios das órbitas estacionárias: $\frac{e_0^2}{r^2}=\frac{mv^2}{r}\Rightarrow\frac{e_0^2}{r}=mv^2$ $\quad r_n=n^2a_0;\left(a_0=\frac{\hbar^2}{me_0^2}\right)$

Energia das órbitas estacionárias:

$$E=T+U=\frac{1}{2}mv^2-\frac{e_0^2}{r}=-\frac{1}{2}\frac{e_0^2}{r}$$

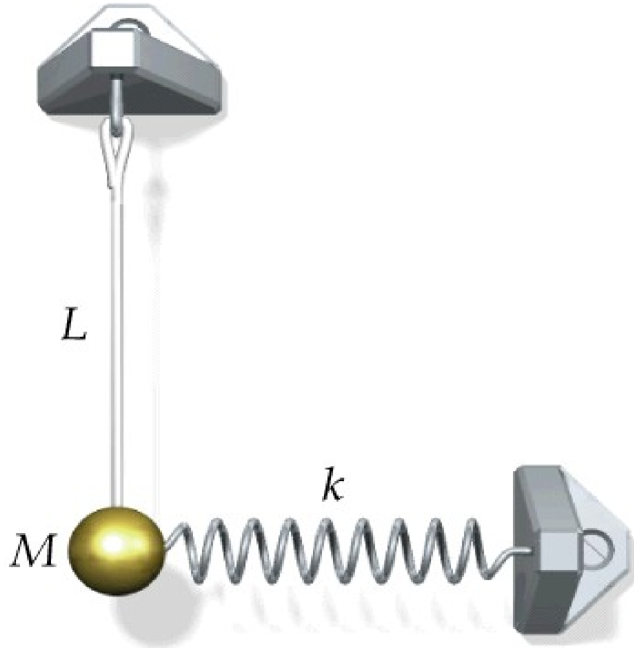
$$E=-\frac{1}{2}\frac{e_0^2}{r}\Rightarrow E=-\frac{e_0^2}{2a_0}\frac{1}{n^2}$$

2º Postulado de Bohr:

$$E_\upsilon=h\upsilon=E_i-E_f$$

1. Exemplo de cálculo de período de oscilação

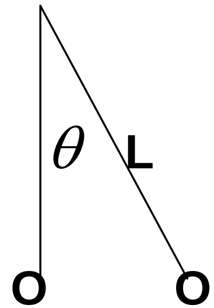
Seja um pêndulo de comprimento **L** com uma bola de massa **M**. A bola está presa a uma mola de constante **k**. Admita que o pêndulo e a mola estão simultaneamente em equilíbrio. (a) Calcule o período do movimento para pequenas oscilações. (b) Tome M=1Kg e L tal que na ausência da mola período de oscilação do pêndulo é de T=2s. Qual a constante da mola se na presença desta o período de oscilação do sistema é T=1s ?



Solução:

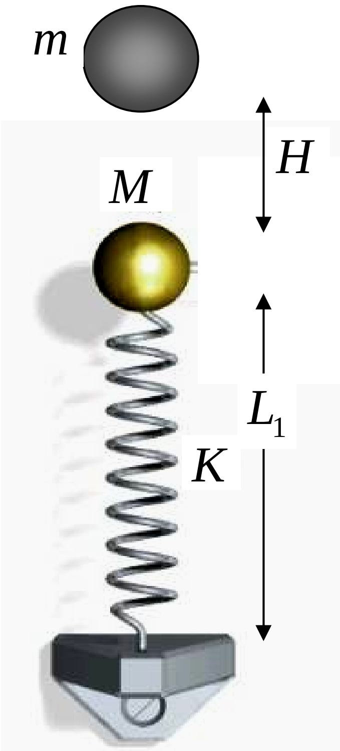
$$F_{pendulo} = -mg \sin\theta \approx -mg\,\theta$$

$$F_{mola} = -KL \sin\theta \approx -KL\,\theta$$



Obtém-se:

$$m\,a = m\,L\,\alpha = -m\,g\,\theta - K\,L\,\theta = -m\,L\left(\frac{g}{L} + \frac{K}{m}\right)\theta \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{K}{m}}}$$



2. Exemplo de Energia Elástica da Mola

Uma mola de comprimento próprio L_0 e constante **K é** mantida verticalmente em repouso por acção de uma massa **M.** Deixa-se cair de uma altura **H** (em relação a **M**) uma outra massa **m**.

a) Qual a altura de equilíbrio, L_1, antes de **m** cair ?

Admita que o choque é elástico.

b) Qual a velocidade adquirida por **M** imediatamente a seguir ao choque e qual o comprimento mínimo L_2 que **M** atinge? Qual a frequência de oscilação do sistema?

Admita agora que o choque é perfeitamente inelástico. (bola **m** fica colada a **M**)

c) Qual a velocidade adquirida por **M** imediatamente a seguir ao choque e qual o comprimento mínimo L_3 que **M** atinge? Qual a frequência de oscilação do sistema?

a) $$Mg = K(L_0 - L_1) \Rightarrow L_1 = L_0 - \frac{Mg}{K}$$

b) $$mgH = \tfrac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gH}$$ Velocidade de **m** imediatamente antes do choque.

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}}$$

$$\begin{cases} m v_0 = m v + M V \\ \tfrac{1}{2} m v_0^2 = \tfrac{1}{2} m v^2 + \tfrac{1}{2} M V^2 \end{cases} \Rightarrow V = \frac{2m}{m+M} v_0$$

$$\tfrac{1}{2} M V^2 = \tfrac{1}{2} K (L_1 - L_2)^2 - Mg(L_1 - L_2) \Rightarrow L_2 = L_1 - \frac{M}{K} g - \sqrt{\left(\frac{M}{K} g\right)^2 + \frac{M}{K} V^2}$$

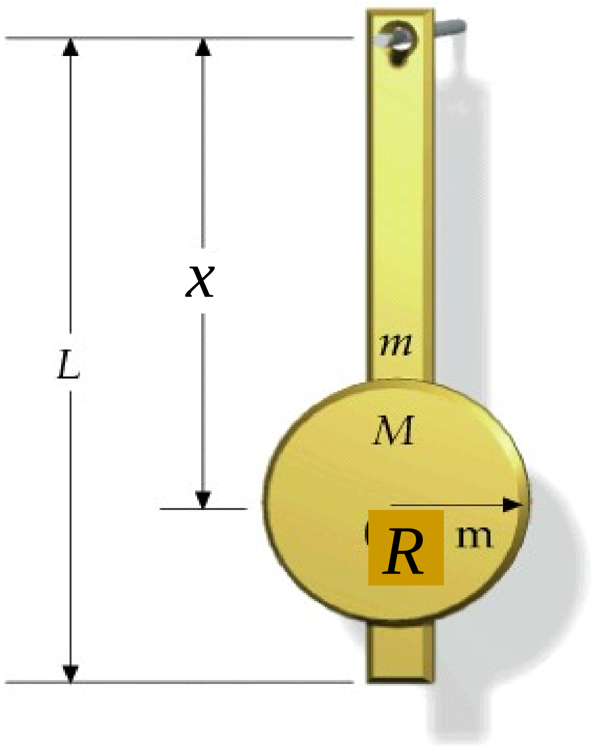
c) Agora perfeitamente inelástico: $$m v_0 = (m + M) V \Rightarrow V = \frac{m}{m+M} v_0$$

$$\tfrac{1}{2}(M+m)V^2 = \tfrac{1}{2} K (L_1 - L_3)^2 - Mg(L_1 - L_3) \Rightarrow L_3 = L_1 - \frac{M}{K} g - \sqrt{\left(\frac{M}{K} g\right)^2 + \frac{M+m}{K} V^2}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{M+m}}}$$

3. Exemplo de cálculo de período de pêndulo físico

XIV-68) Um pêndulo de relógio é constituído por uma barra de massa **m** e comprimento **L** e um disco de massa **M** e raio **R.** Qual o período **T** em função de **x**? Qual o valor de x para se obter um período mínimo?



Solução: Temos de encontrar o CM do sistema barra + disco:

$$y_{CM} = \frac{m(L/2) + Mx}{m + M}$$

Calculamos agora o momento em relação ao eixo rotação:

$$\begin{cases} I_{barra} = \frac{1}{12} mL^2 + m(\frac{L}{2})^2 = \frac{1}{3} mL^2 \\ I_{disco} = \frac{1}{2} MR^2 + Mx^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = I_{barra} + I_{disco} = \frac{1}{3} mL^2 + \frac{1}{2} MR^2 + Mx^2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{sistema}}{(m+M) g y_{CM}}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} mL^2 + \frac{1}{2} MR^2 + Mx^2}{(\frac{1}{2} mL + Mx) * g}}$$

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \qquad (\tfrac{1}{2} mL + Mx) 2Mx - (\tfrac{1}{3} mL^2 + \tfrac{1}{2} MR^2 + Mx^2) 2M = 0$$

$$\boxed{x^2 + \frac{mL}{2M} x - \left(\frac{mL^2}{3M} + \frac{1}{2} R^2 \right) = 0 \Rightarrow x_{min} = -\frac{mL}{4M} + \sqrt{\frac{m^2 L^2}{16 M^2} + \left(\frac{mL^2}{3M} + \frac{1}{2} R^2 \right)}}$$

$$\boxed{T_{min} = 2\pi \sqrt{\frac{x_{min}}{g}}}$$

4. Exemplo de estudo da função de onda.

Mostre que a função $f(x,t) = \dfrac{A}{x^2 + B^2t^2 - 2Bxt + D}$ representa um impulso que se propaga como uma onda segundo os xx positivos e calcule a sua velocidade de propagação.

(Estudar gráfico de f(x,0))

Para ser função de onda tem de satisfazer a equação das ondas:

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0}$$

Notar que a função se pode escrever de outro modo:

$$f(x,t) = \frac{A}{x^2 + B^2t^2 - 2Bxt + D} = \frac{A}{(x - Bt)^2 + D}$$

Usando: $u = x - Bt$

Vem: $f(x,t) = f(u) = \dfrac{A}{u^2 + D}$

Calculamos as derivadas parciais da função de onda em relação a **x** e **t:**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{df}{du}\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{df}{du} \\ \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{df}{du}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{df}{du}(-B) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{df}{du}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{d^2 f}{du^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \dfrac{d}{du}\left(-B\dfrac{df}{du}\right)\dfrac{\partial u}{\partial t} = B^2\dfrac{d^2 f}{du^2} \end{cases}$$

Utilizamos agora a equação das ondas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 f}{du^2} = \frac{B^2}{v^2}\frac{d^2 f}{du^2}$$

A igualdade só se verifica se:

$$1 = \frac{B^2}{v^2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v = B}$$

Se **v** fosse negativo a onda propagava-se segundo os xx negativos.

5. Exemplo de colisão de Compton

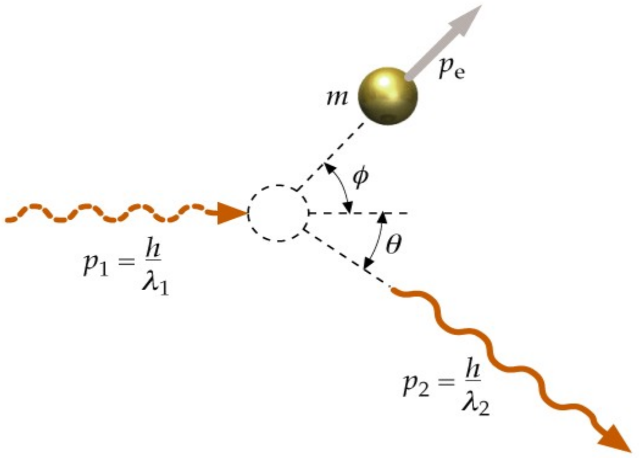
A dispersão de raios X por electrões podeser estudadda considerando o choque não frontal do fotão com um electrão parado de massa em repouso $\mathbf{m_{0e}}$. Um fotão inicial, de comprimento de onda λ_1 , choca elasticamente com um electrão livre, parado. Após o choque o fotão passa a ter comprimento de onda λ_2 e é desviado segundo um ângulo θ em relação à direcção incidente enquanto o electrão é desviado de um ângulo ϕ. Dados: λ_1 e $\mathbf{m_{oe}}$.

1) Qual a energia do fotão incidente?

2) Mostre que o comprimentode onda adquirido λ_2 é dado por:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_C\,(1-\cos\theta)$$

3) Qual o ângulo ϕ ?



A **energia** e o **momento** do **fotão** estão relacionados pela velocidade **c** :

$$\left\{\begin{array}{l} p = \dfrac{h}{\lambda} \\ E = hf \end{array}\right. \Rightarrow p = \frac{E}{c} \Rightarrow E_1 = \frac{hc}{\lambda_1}$$

Escrevemos as eq. de conservação do momento linear e da energia total:

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{p}_{antes} = \vec{p}_{depois} \Rightarrow \begin{array}{c} \overline{xx} \\ \overline{yy} \end{array} \left\{\begin{array}{l} p_1 = p_e\cos\phi + p_2\cos\theta \\ 0 = p_2\sin\theta - p_e\sin\phi \end{array}\right. \\ E_{antes} = E_{depois} \Rightarrow E_1 + m_{0e}c^2 = E_2 + E_e \end{array}\right.$$

Passamos a ter um sistema de 3 equações a 3 incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{c} (p_e\cos\phi)^2 = (p_1 - p_2\cos\theta)^2 \\ (p_e\sin\phi)^2 = (p_2\sin\theta)^2 \\ E_e = E_1 - E_2 + m_{0e}c^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\theta \\ E_e^2 = (cp_e)^2 + (m_{0e}c^2)^2 \\ E_e = E_1 - E_2 + m_{0e}c^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} (cp_e)^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\theta \\ (cp_e)^2 = E_e^2 - (m_{0e}c^2)^2 \\ E_e^2 = (E_1 - E_2 + m_{0e}c^2)^2 \end{array}\right.$$

Cont.

Cont.

$$\begin{cases} E_e^2 - (m_{0e}c^2)^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\theta \\ E_e^2 - (m_{0e}c^2)^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 + 2(E_1 - E_2)m_{0e}c^2 \end{cases} \Rightarrow \quad (E_1 - E_2)m_{0e}c^2 = E_1 E_2(1-\cos\theta)$$

Simplificando:

$$\left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1}\right)m_0c^2 = 1-\cos\theta \Rightarrow \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)$$

Usando: $\lambda_{Compton} = \dfrac{h}{m_0c}$ Obtemos o resultado: $\boxed{\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_C(1-\cos\theta)}$

3) Dividindo a equação 2 pela 1 obtemos a tangente do ângulo:

$$\boxed{tg\phi = \frac{p_2\sin\theta}{p_1 - p_2\cos\theta}}$$

6. Exemplo de Modelo de Bohr

a) Quantas vezes aumenta o raio da órbita do electrão no átomo de hidrogénio, que se encontra inicialmente no estado fundamental, se absorver um fotão de energia E_n=8hcR/9.

b) Determine o comprimento de onda associado ao electrão de orbita n

Solução:

a) **Niveis de energia do átomo de hidrogénio:**

$$E_n = -\frac{e_0^2}{2a_0}\frac{1}{n^2} = -hcR\frac{1}{n^2}$$

2⁰ postulado de Bohr: Numa transição de um estado estacionário E_i para outro de energia mais elevada E_f a energia do fotão absorvido E_ν é:

$$E_\upsilon = h\upsilon = E_i - E_f$$

Raios das órbitas do átomo de hidrogénio:

$$r_n = n^2 a_0; \left(a_0 = \frac{\hbar^2}{me_0{}^2} \right)$$

Cálculo do nivel n que o electrão passa a ocupar depois de absorver o fotão:

$$E_\upsilon = h\upsilon = E_i - E_f \Leftrightarrow \frac{8Rch}{9} = Rch\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad \Rightarrow \frac{1}{n^2} = \left(1 - \frac{8}{9}\right) \Rightarrow n = 3$$

Cálculo de r_n/a_0:

$$\frac{r_n}{a_0} = n^2 = 9$$

b) Do primeiro postulado de Bohr:

$$2\pi r = n\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi r_n}{n}$$