

NOTA SOBRE ANÁLISE DE DADOS EXPERIMENTAIS

INTRODUÇÃO

A obtenção de qualquer resultado experimental pressupõe a realização de pelo menos uma medição de uma ou várias grandezas. Essas grandezas podem ser **directas**, se medidas directamente, ou **indirectas**, quando obtidas a partir das primeiras.

O **valor mais representativo** (ou mais provável) de um conjunto de medições para a mesma grandeza está relacionado com a **exactidão** com que é possível medir essa grandeza, ou seja, com o desvio do valor obtido para o valor real da grandeza. As **incertezas** (ou **erros**) cometidas nas leituras das grandezas directas, relacionadas com a precisão dos instrumentos de medida e com o próprio método experimental, propagam-se através das equações que traduzem as leis físicas que se supõem descrever os fenómenos em análise e vão afectar a **precisão** com que as grandezas indirectas são calculadas.

As incertezas experimentais estão presentes em todas as medições e a necessidade de se contabilizarem parece evidente:



Figura 1: Gare de Montparnasse, Outubro de 1895.

Uma análise do valor mais representativo e das incertezas numa experiência permite, no final, concluir sobre a precisão e a exactidão dos resultados obtidos. Esses resultados devem ser apresentados na forma **Valor mais representativo \pm incerteza**.

Os conceitos de precisão e exactidão estão ilustrados na figura 2 através dos pontos de impacto de objectos num alvo.

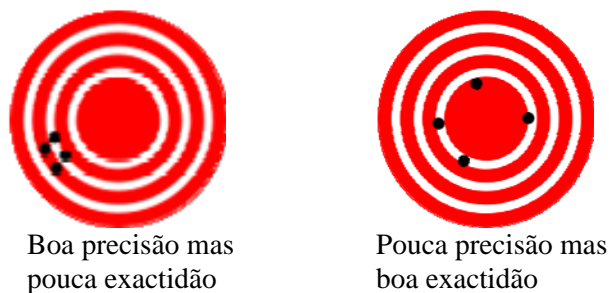


Figura 2: Ilustração da noção de “precisão” e “exactidão”.

Os erros podem classificar-se quanto à sua origem como **sistemáticos**, se influenciarem os resultados sempre num mesmo sentido, ou **aleatórios**. No primeiro caso, podem ser eliminados ou, pelo menos, quantificados, por calibração dos aparelhos de medida. No último caso, é possível estimar o seu valor a partir de medições sucessivas da mesma grandeza.

1. Incertezas nas grandezas directas

1.1 Escalas graduadas

Uma parte significativa das medições efectuadas no laboratório implica a leitura de valores em escalas graduadas. Na medição de um comprimento recorrendo a uma régua, como ilustrado na figura 3, se se fizer coincidir o zero da escala com uma das extremidades, raramente a outra coincidirá com um traço da escala, ficando sim entre dois traços consecutivos. A incerteza na medição deste comprimento está, assim, relacionada com a menor divisão desta escala (1 mm, neste caso). Normalmente, é possível perceber se a segunda extremidade está mais próxima de um ou outro traço, pelo que se poderá dizer que o erro cometido será **pelo menos** igual a **metade da menor divisão** da escala utilizada. Neste exemplo, o comprimento será então $2,5 \pm 0,05$ cm.

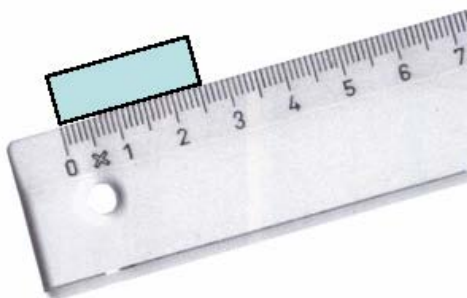


Figura 3: Medição com uma escala graduada.

1.2 Escalas digitais

A maior parte das medições no laboratório são realizadas com instrumentos de mostradores digitais. Considerando que estes aparelhos estão calibrados, o erro é igual a

metade da unidade do dígito menos significativo. No exemplo da figura 4, o valor obtido seria apresentado como $19,16 \pm 0,005$ V.



Figura 4: Medição com um instrumento digital.

1.3 Desvio padrão

Em certas condições, o erro cometido na medição duma grandeza directa é (bastante) maior do que a incerteza do aparelho de medida utilizado. O exemplo habitualmente citado é o da medição do período de oscilação de um pêndulo: quer se utilize um cronómetro analógico quer se utilize um digital, o maior erro cometido prende-se com a decisão e reacção do operador. A solução para se conseguir um valor mais próximo da realidade é repetir várias vezes a medição. A repetição de uma medida da variável x nas mesmas condições experimentais conduz a uma distribuição aleatória de resultados em torno de um valor médio \bar{x} (média aritmética) que pode ser considerado como o *melhor* valor obtido nesta medida. Num grande número de situações, esta repetição realizada N vezes nas mesmas condições experimentais conduz a um valor médio que se aproxima do “verdadeiro” valor da grandeza à medida que N aumenta. Pode calcular-se o **desvio padrão**

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (1)$$

que exprime a dispersão dos resultados e o valor médio calculado tem uma incerteza, **desvio padrão da média**, $s_m = s / \sqrt{N}$, ou seja

$$s_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \quad (2)$$

O resultado final neste caso (número elevado de determinações nas mesmas condições experimentais) pode apresentar-se como $\bar{x} \pm s_m$.

O carácter aleatório das determinações resulta principalmente das flutuações que ocorrem nos instrumentos de leitura devido a flutuações de tensão ou de corrente eléctrica ou de

vibrações mecânicas e também quando o operador “humano” tem um papel relevante na medição.

A **lei de distribuição normal de Gauss** é um modelo teórico frequentemente utilizado para a análise estatística dos erros aleatórios cometidos em medições experimentais. O número de valores obtidos com o mesmo valor x , se N é um número elevado pode ser descrito pela função de distribuição $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$, sendo σ o desvio padrão da distribuição. Esta função tem um máximo para o valor médio \bar{x} (e é simétrica em relação a ele), apresenta dois pontos de inflexão $x = \pm \sigma$ e tende rapidamente para zero à medida que $|x - \bar{x}|$ se torna muito maior que σ . Pode provar-se que o valor mais provável numa medição é o valor médio e que 68% e 95% das determinações caem respectivamente nos intervalos $\{\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma\}$ e $\{\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma\}$. Pode provar-se também que a estimativa do desvio padrão tem também uma incerteza relativa que pode ser estimada por $1/\sqrt{2(N-1)}$

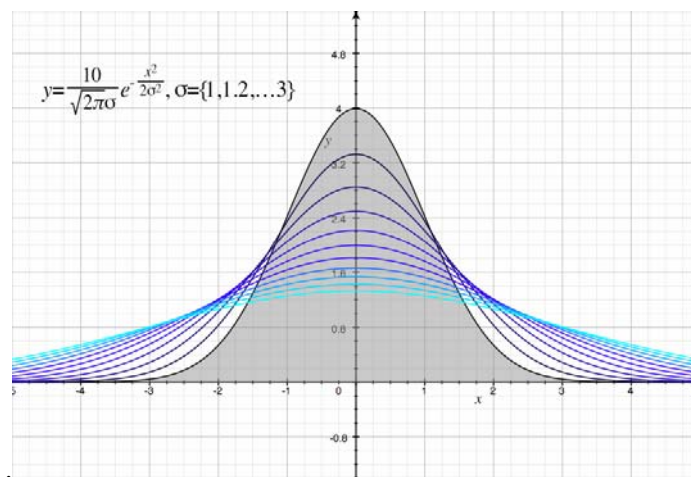


Figura 5: Distribuição de Gauss para diferentes valores do desvio padrão σ .

Se o número de determinações nas mesmas condições experimentais é relativamente pequeno (tipicamente ~ 3) a análise estatística perde significado e o erro da variável pode ser estimado usando um majorante Δx .

2. Apresentação dos resultados

2.1 Algarismos significativos

Os resultados experimentais obtidos devem reflectir a limitação dos instrumentos de medida e do método utilizado. Isto é conseguido se se apresentar o resultado com o número de **algarismos significativos** correcto. O que permite definir este número é a estimativa das incertezas experimentais.

Em rigor, num resultado final, o erro deveria ser arredondado (majorado) para um algarismo significativo e o valor experimental só deveria ser apresentado com algarismos significativos. Por uma questão de simplificação, muitas vezes é apresentado o mesmo número de algarismos do valor e do erro (devendo este ser sempre majorado):

Exemplos: $R = 0,185 \pm 0,003 \text{ m}$ $T = 297,0 \pm 0,5 \text{ K}$ $v = 344,3 \pm 0,4 \text{ m s}^{-1}$
 $B = (5,92 \pm 0,08) 10^{-4} \text{ T}$ $q/m = (1,77 \pm 0,07) 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$
 $e = 0,050 \pm 0,001 \text{ mm}$ ou $e = 50 \pm 1 \text{ }\mu\text{m}$

Na prática, verifica-se ser preferível manter dois (ou mais) algarismos para os erros que são utilizados em cálculos intermédios.

2.2 Precisão e exactidão

A dispersão dos resultados permite calcular sempre a precisão das medidas efectuadas. Se ε_x for o erro de x então a

$$\text{precisão} = 100 \times \left(1 - \frac{\varepsilon_x}{x}\right) \% \quad (3)$$

A comparação do valor médio obtido com o valor da mesma grandeza tabelado, nas mesmas condições físicas (ou proveniente de outras experiências), permite estimar a exactidão do valor obtido. Se X for o valor conhecido da grandeza e x for o valor medido com um erro ε_x então o

$$\text{"desvio - à - exactidão"} = 100 \times \left|1 - \frac{x}{X}\right| \% \quad (4)$$

O desvio à exactidão é muito sensível a erros sistemáticos que não foram evitados ou corrigidos.

2.3 Erros relativos

Por vezes, é necessário comparar erros de grandezas diferentes (com unidades diferentes) para se poder saber qual o factor que influencia mais (tem maior peso) a incerteza final. Nestas situações, torna-se mais simples utilizar o conceito de **erro relativo**, definido do seguinte modo: se o valor medido x tiver um erro ε_x então o erro relativo de x (η_x) é dado por

$$\eta_x = \frac{\varepsilon_x}{x}. \quad (5)$$

3. Incertezas nas grandezas indirectas

As grandezas indirectas são obtidas a partir das directas. Portanto, o erro do valor final (grandeza indirecta) é, assim, determinado pelas incertezas das grandezas directas. A este processo chama-se **propagação de erros**. Mencionamos de seguida algumas das maneiras possíveis de determinar estas incertezas.

3.1 Majoração e minoração

Como exemplo, pense-se na medição da frequência de uma onda sinusoidal: normalmente, mede-se (directamente) o tempo correspondente a um ou vários períodos T e calcula-se a frequência a partir da expressão $f = \frac{1}{T}$. Neste exemplo, o período será $T \pm \varepsilon_T$ e a questão que se coloca é como determinar o erro ε_f .

Um dos métodos possíveis consiste em:

- determinar o maior valor (**majorante**) de f , que, neste caso, é $f_{max} = \frac{1}{T - \varepsilon_T}$;
- determinar o menor valor (**minorante**) de f , que, neste caso, é $f_{min} = \frac{1}{T + \varepsilon_T}$;
- considerar o erro como metade da diferença entre esses limites: $\varepsilon_f = \frac{f_{max} - f_{min}}{2}$.

3.2 Desvio padrão

Para uma grandeza indirecta $F(X,Y,Z)$, em que X , Y e Z são grandezas medidas directamente, com desvios padrões σ_X , σ_Y e σ_Z , pode calcular-se o desvio padrão σ_F da grandeza F a partir de

$$\sigma_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial X} \sigma_X\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \sigma_Y\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Z} \sigma_Z\right)^2}. \quad (6)$$

3.3 Propagação linear

Quando não é possível fazer uma análise estatística e, portanto, não se dispõe de resultados nas mesmas condições experimentais para um grande número de determinações, pode estimar-se um majorante do erro da grandeza indirecta ε_F a partir de

$$\varepsilon_F = \left| \frac{\partial F}{\partial X} \right| \varepsilon_X + \left| \frac{\partial F}{\partial Y} \right| \varepsilon_Y + \left| \frac{\partial F}{\partial Z} \right| \varepsilon_Z \quad (7)$$

3.4 Erros relativos

A utilização dos erros relativos apresenta algumas vantagens quando o cálculo do resultado final envolve produtos, quocientes e/ou potências das variáveis de medida.

Por exemplo, considere-se a grandeza F , obtida a partir de

$$F(x,y) = ax^p y^q, \quad (8)$$

onde x e y são duas variáveis com erros ε_x e ε_y , respectivamente. A partir das equações 5 e 7 obtém-se

$$\varepsilon_F = \left| apx^{p-1}y^q \right| \varepsilon_x + \left| aqx^p y^{q-1} \right| \varepsilon_y = \left| p \frac{F}{x} \right| \varepsilon_x + \left| q \frac{F}{y} \right| \varepsilon_y = |F| (|p\eta_x| + |q\eta_y|) \quad (9)$$

ou seja

$$\eta_F = |p\eta_x| + |q\eta_y| \quad (10)$$

Este exemplo pode ser facilmente generalizado para o caso da função F depender de mais variáveis. Note-se que os expoentes p ou q podem ser positivos ou negativos e que se torna muito fácil identificar a partir da equação 10 qual ou quais as variáveis que contribuem mais para o erro do resultado final.

Exercício:

Aplice o raciocínio anterior ao caso da expressão utilizada para determinação do calor específico de um material, c_1 , a partir do calor específico da água, c_2 , utilizada no 1º trabalho de termodinâmica

$$c_1 = c_2 \frac{m_2 + m_{equi}}{m_1} \left(\frac{T_m - T_2}{T_1 - T_m} \right)$$

onde m_1 , m_2 , T_m , T_1 e T_2 são a massa do material, a massa da água, a temperatura final do conjunto água+material, a temperatura inicial do material e a temperatura inicial da água, respectivamente. A massa m_{equi} , adicionada à massa da água, corresponde à correcção necessária para compensar o calor trocado com o calorímetro. Note que cada fracção pode ser representada da forma da equação 8, bastando considerar $a=p=1$ e $q=-1$.

4. Análise gráfica de resultados

Em muitas situações em física experimental é conveniente efectuar-se a representação gráfica da dependência dos valores experimentais em função de uma determinada variável (ou variáveis) que define as condições experimentais. Frequentemente, essa dependência tem um modelo teórico, existindo uma função que deverá ser possível ajustar a esses pontos experimentais. No caso duma função linear, esse ajuste pode ser feito visualmente,

traçando a recta que se aproxima o melhor possível do conjunto de pontos experimentais. Noutros casos, esse ajuste tem de ser feito utilizando métodos numéricos.

O **Método dos Mínimos-Quadrados** é um método estatístico de tratamento de dados que permite obter os parâmetros de uma função que a aproximam o mais possível dos pontos experimentais. Nas figuras 6a e 6b mostram-se duas situações em que as funções teóricas

$$\Delta l = \frac{g}{K} m \quad (11)$$

$$A_M = \frac{A_0}{\sqrt{(4\pi^2 f_0^2 - 4\pi^2 f_a^2)^2 + 16\pi^2 \lambda^2 f_a^2}} \quad (12)$$

se aproximam claramente dos pontos experimentais. A equação 11 traduz o alongamento de uma mola quando nela se suspende uma massa m . A equação 12 traduz a amplitude de oscilação de uma massa suspensa numa mola quando sujeita a oscilações forçadas de frequência variável f_a . A frequência própria do sistema é f_0 , o coeficiente de amortecimento do sistema é λ e A_0 é uma constante.

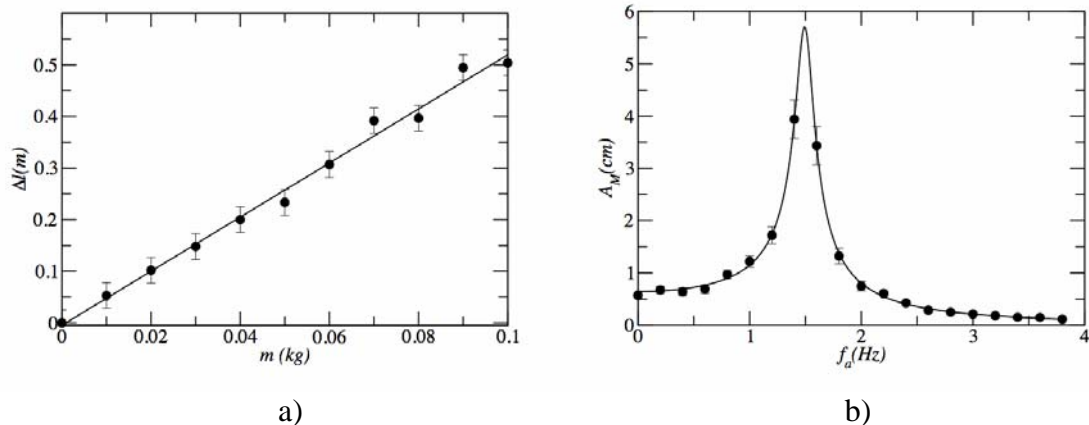


Figura 6: a) Ajuste da função (11) a um conjunto de dados experimentais; b) ajuste da função (12) a um conjunto de dados experimentais.

Observando os gráficos, é fácil verificar que as curvas teóricas não passam por todos os pontos experimentais. Existem pontos com ordenadas superiores às curvas teóricas e pontos com ordenadas inferiores. No caso do gráfico da figura 6^a, poderíamos ter obtido um ajuste idêntico se tivéssemos colocado os pontos num gráfico em papel milimétrico e de seguida desenhado uma recta que se aproximasse o mais possível de todos os pontos simultaneamente. No caso do gráfico da figura 6^b, já seria mais difícil desenhar a curva teórica porque é uma curva que não depende linearmente da variável independente.

Numericamente, o problema resume-se a encontrar o valor do declive da recta, no caso da figura 6^a, e dos valores de A_0 , λ , f_a que permitem traçar a melhor curva (12), no caso da figura 6^b.

O caso da recta é mais fácil porque existe uma solução analítica. O caso da figura 6^b só tem uma solução numérica, obtida iterativamente.

O ajuste de uma recta pelo *método dos mínimos quadrados* é muitas vezes designado por *regressão linear* e numericamente pode ser expresso da seguinte forma:

1. Para cada ponto experimental calcula-se a diferença entre a ordenada experimental e o valor da função calculado para a abcissa correspondente $\Delta y = y_{\text{exp}} - f(x_i)$. Se a função for uma recta então $f(x) = a + bx$ e $\Delta y = y_{\text{exp}} - a - bx_i$
2. Calcula-se a soma dos quadrados dessas diferenças para todos os pontos experimentais tendo em conta o erro experimental de cada ponto, $\varepsilon_{y_{\text{exp}}}$

$$Q^2(a,b) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_{\text{exp}} - f(x_i)}{\varepsilon_{y_{\text{exp}}}} \right)^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_{\text{exp}} - a - bx_i}{\varepsilon_{y_{\text{exp}}}} \right)^2 \quad (13)$$

Note-se que quanto maior for o erro experimental de um ponto $\varepsilon_{y_{\text{exp}}}$ menor será a contribuição desse ponto para o resultado final.

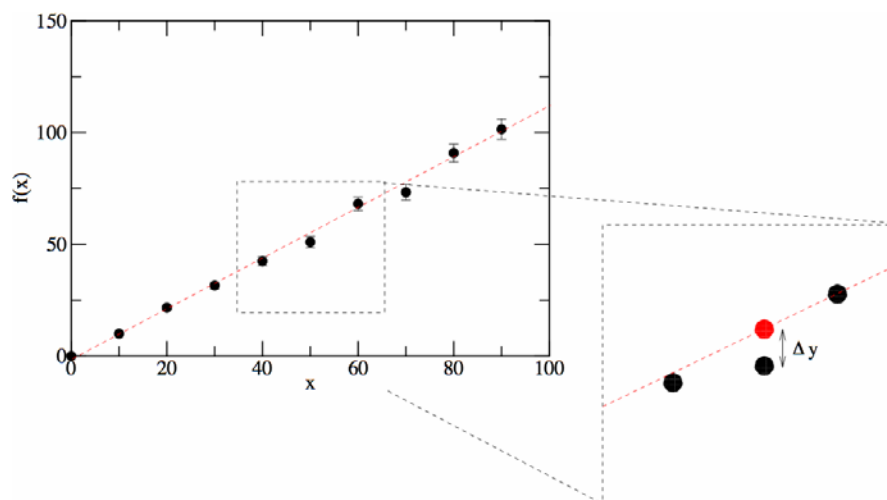


Figura 7: Detalhe da qualidade do ajuste de uma recta a um conjunto de pontos experimentais.

3. O resultado dessa soma, $Q^2(a,b)$, é uma função de duas variáveis a e b , a *ordenada na origem* e o *declive*, respectivamente. Os valores de a e b que interessam são aqueles para os quais a função $Q^2(a,b)$ tem o valor mínimo. Essa situação corresponde à ideia intuitiva de que a curva passa próximo de todos os pontos simultaneamente. Os valores de a e b que correspondem a esse mínimo obtêm-se calculando

$$\begin{cases} \frac{\partial Q^2}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial Q^2}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

(o facto de termos uma função de duas variáveis não constitui problema, uma vez que basta calcular a derivada em ordem a uma das variáveis de cada vez e

assumindo que a outra é constante). Para termos a certeza de que os valores de a e b que satisfazem (14) correspondem a um mínimo da equação 13, as segundas derivadas têm de ser positivas, condição que se verifica porque é uma função quadrática.

O sistema (14) tem solução analítica e os valores a e b são fáceis de obter resolvendo o sistema de equações. Usualmente, as máquinas de calcular com funções estatísticas permitem efectuar estes cálculos de forma simples e automática. No caso de uma função não linear nos parâmetros de ajuste, por exemplo a equação 12, o sistema de equações 14 pode não ter solução analítica e os valores dos parâmetros de ajuste têm de ser obtidos numericamente utilizando um método iterativo.

Prof. Pedro Sebastião

Prof. António Ferraz

IST, Departamento de Física, 2008